EXERCICE N°1 :	40'	7 points	

I– Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x\left(1+\ln^2(x)\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\left(1+\ln(x)\right)^2$.

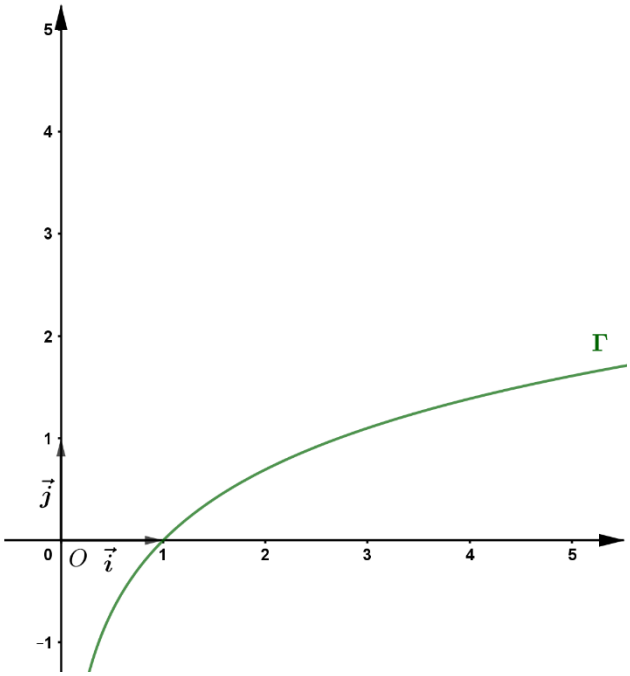
b) Dresser le tableau de variation de f.

4°) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1}.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

5°) Dans la figure ci-dessous on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x\mapsto\ln x$.



a) Construire le point $A\left(e^{-1},f\left(e^{-1}\right)\right)$.

b) Tracer la tangente T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

6°) a) Justifier que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de g^{-1}.

II– On considère la suite (u_n) définie sur *IN* par : $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Montrer que pour tout entier n, $e^{-1} \leq u_n < 1$.

2°) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3°) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

III– Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1°) Montrer que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.

2°) a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(x)dt$.

c) En déduire que tout $x > 0$, $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x)$.

3°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et en déduire $\int_0^1 f(t)dt$.

b) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+2)}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

c) Montrer que *f* réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.

3°) a) Résoudre dans *IR* l'équation : $x^2 = x+1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point *A* d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente *T* à $\mathscr{C}$ au point *A* est $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente *T* passe par le point $B\left(0,-1-\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

4°) a) Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite (D) d'équation : $y = x+2$ et la courbe Γ de la fonction : $x \mapsto x^2+1$.

b) Construire les points *A* et *B*, la tangente *T* et tracer la courbe $\mathscr{C}$.